离散数学

- 命题逻辑
- 一阶逻辑
- 二元关系
- 图论
  - 基本概念
    - 无向图及有向图
      - 空图：顶点集为空的图
      - **零图**：没有一条边的图
      - **平凡图（一阶零图）**：只有一个顶点没有边的图
      - **握手定理**
        - **总度数=2x边数**
        - 推论
          - **度数为奇数的顶点有偶数个**
          - 有向图：总入度=总出度=边数
      - **多重图**：含平行边的图
      - **简单图**：不含平行边也不含环的图
      - **n阶无向完全图**：设G=<V，E>是n阶无向简单图，若G中任何顶点都与其余n-1个顶点相邻，则称G为n阶无向完全图
      - **n阶有向完全图**：设G=<V，E>是n阶有向简单图，若对于任意顶点u，v属于V（u!=v），既有有向边<u，v>，又有<v，u>，则称G为n阶有向完全图
      - 子图-母图
        - 设G=<V，E>，G'=<V'，E'>是两个图。若V'是V的子集且E'是E的子集，则称G'是G的子图，G是G'的母图
        - 真子图：若G'是G的子图且V'是V的真子集或E'是E的真子集，则称G'是G的真子图
        - **生成子图**：若G'是G的子图且V'=V，则称G'是G的生成子图
        - **导出子图**：设V1是V的子集，且V1不为空，以V1为顶点集，所有两端点均在V1中的边为边集的G的子图，称为V1导出的导出子图
          - 设E1是E的子集，且E1不为空，以E1中边所关联的所有顶点为顶点集的G的子图，称为E1导出的导出子图
  - 通路、回路和图的连通性
    - **简单通路**：若交替序列中所有边互不相同，则称交替序列为简单通路
    - **简单回路**：若交替序列为简单通路，当v0=vn时，称此简单通路为简单回路
    - **初级通路/路径**：若交替序列中除v0、vn外所有顶点互不相同，所有边也互不相同，则称此通路为初级通路或路径
    - **初级回路**
      - 若初级通路中v0=vn，则称此初级通路为初级回路或圈
      - 无向图中，环和两条平行边构成的回路分别为长度为1和2的初级回路
      - 有向图中，环和两条方向相反边构成的回路分别为长度为1和2的初级回路
    - 复杂通路：有重复边出现的通路称为复杂通路
    - 复杂回路：有重复边出现的回路称为复杂回路
    - 连通性
      - 无向图
        - **在一个无向图G中，若从顶点u到v存在通路，则称u与v是连通的，规定任何顶点和自身总是连通的**
        - **连通图**：若无向图G是平凡图或G中任意两顶点都是连通的，则称G是连通图，否则，称G是非连通图
        - **连通分支**：设G为一个无向图，R是G中顶点之间的连通关系。按照R可讲V（G）或分成若干个等价类，设V1、V2、…、Vk。有他们导出的导出子图称为G的连通分支
      - 有向图
        - **在一个有向图中，若从顶点u到v存在通路，则称u可达v，规定任何顶点到自身总是可达的**
        - **弱连通图**：若有向图略去各有向边的方向后所得无向图是连通图，则称该有向图为弱连通图，简称连通图
        - **单向连通图**：若有向图中任意两顶点间至少有一个可达另一个，则称其为单向连通图
        - **强连通图**：若有向图中任何一对顶点都是相互可达的，则称其为强连通图
        - 强连通图>单向连通图>弱连通图
      - **点割集**：设无向图G=<V，E>，V'是V的真子集，若p（G-V'）>p（G），且对V'的任何子集V''，p（G-V''）=p（G），则称V'是G的点割集。
        - **割点**：若点割集中只有一个顶点，则称该顶点为割点
      - **边割集**：又E'是E的子集，若p（G-E'）>p（G），且对E'的任何子集E''，p（G-E''）=p（G），则称E'是G的边割集，简称割集
        - **割边/桥**：若边割集中只有一条边，则称该边为割边或桥
  - 特殊的图
    - 二部图
      - **完全二部图**：若V1中每一个顶点与V2中每一个顶点均有且仅有一条边相关联，则称二部图G为完全二部图
      - **一个无向图是二部图当且仅当该无向图中没有长度为奇数的回路**
      - 匹配
        - 设G=<V，E>是无向图，M是E的子集，若M中任何两条边均不相邻，则称M为G中的匹配
        - **极大匹配**：若M中再加入任何一条边都不是匹配了，则称M为极大匹配
        - **最大匹配**：边数最多的极大匹配称为最大匹配
        - **完美匹配**：若G中每个顶点都是M饱和点，则称M为完美匹配
        - **完备匹配**：设G=<V1，V2，E>为一个二部图，|V1|<=|V2|，M为G中一个最大匹配，若|M|=|V1|，则称M为G中V1到V2的完备匹配
        - 当|V1|=|V2|时，完备匹配是完美匹配
        - 匹配数：最大匹配中边的条数
        - 饱和点：设M为G中的一个匹配，v属于V（G），若存在M中的边与v关联，则称v为M饱和点，否则称v为M非饱和点
    - 欧拉图
      - 经过图（无向图或有向图）中每条边一次且仅一次并且行遍图中每个顶点的回路（通路），称为欧拉回路（欧拉通路）
      - **存在欧拉回路的图称为欧拉图**
      - 无向图
        - **无向图G中有欧拉回路**：当且仅当G是连通图且无奇度顶点
        - 无向图G有欧拉通路、但无欧拉回路：当且仅当G是连通图且恰好有两个奇度顶点。这两个奇度顶点是欧拉通路的端点
      - 有向图
        - **有向图D有欧拉回路**：当且仅当D是连通的且每个顶点的入度等于出度
        - 有向图D有欧拉通路但无欧拉回路：当且仅当D是连通的，且除了两个顶点外，其余顶点的入度均等于出度。这两个特殊的顶点中，一个顶点的入度比出度大1，另一个顶点的入度比出度小1。任何欧拉通路以前一个顶点为终点，以后一个顶点为起点
    - 哈密顿图
      - 经过图中每一个顶点一次且仅一次的回路（通路）称为哈密顿回路（通路）
      - **存在哈密顿回路的图称为哈密顿图**
      - **有割点的图一定不是哈密顿图**
- 树论
  - 基本概念
    - 树
      - 不含回路的连通无向图称为无向树，简称树
      - 树叶：树中度为一的顶点称为树叶
      - 分支点：度数大于等于2的顶点称为分支点
    - 森林：每个连通分支均是树的非连通无向图称为森林
    - 平凡树：平凡图称为平凡树
    - 生成树
      - 设G=<V，E>是无向连通图，T是G的生成子图并且是树，则称T是G的生成树
      - 树枝：G在T中的边称为树枝
      - **弦**：不在T中的边称为T的弦
      - 余树
        - T的所有弦的集合的导出子图称为T的余树
        - **注意余树不一定是树，也不一定连通**
      - **基本回路**
        - 设T是连通图G=<V，E>的一颗生成树，对每一条弦e，存在唯一由弦e和树T的树枝构成的初级回路Ce，称Ce为对应于弦e的基本回路
        - 基本回路系统：所有基本回路的集合为对应树的基本回路系统
      - **基本割集**
        - 设T是连通图G=<V，E>的一颗生成树，对T的每一条树枝a，存在唯一的由树枝a，其余的边都是弦的割集Sa，称Sa为对应树枝a的基本割集
        - 基本割集系统：所有基本割集的集合为对应生成树的基本割集系统
      - **最小生成树**
        - 设T是无向连通带权图G=<V，E，W>的生成树，T中所有边的权之和称为T的权。G的所有生成树中权最小的生成树称为最小生成树
        - **避圈法**
    - 根树
      - 一棵平凡的有向树，如果有一个顶点的入度为0，其余顶点入度均为1，则称此有向树为根树
      - 树根：入度为0的顶点
      - 内点：入度为1、出度大于0的顶点
        - 内点和树根统称为分支点
      - 树叶：入度为1、出度为0的顶点
      - **层数**
        - 在根树T中，从树根到顶点v的通路长度称为v的层数
        - 树高：顶点的最大层数
          - **树根所在层为第0层**
      - 根子树：设T为一棵根树，a为T中一个顶点且不是树根，称a及其后代导出的子图T'为T的以a为根的子树，简称根子树
      - 有序树：如果根树每一层上的顶点规定次序，称这样的根树为有序树
      - r叉树：若根树T的每个分支点至多有r个儿子，则称T为r叉树
      - r叉正则树：若根树T的每个分支点恰好有r个儿子，则称T为r叉正则树
      - r叉完全正则树：若根树T是r叉正则树，且所有树叶的层数都等于树高，则称T为r叉完全正则树
      - r叉有序树：若r叉树T是有序的，则称T是r叉有序树
      - r叉正则有序树：若r叉正则树T是有序的，则称T是r叉正则有序树
      - r叉完全正则有序树：若r叉完全正则树T是有序的，则称T是r叉完全正则有序树
      - **最优2叉树**
        - W（T）：**等于所有分支点的权之和**
        - **哈夫曼算法推广**
          - r元正则树的分支点数s与树叶数t之间满足（r-1）s=t-1
          - 分两种情况讨论
            - （t-1）/（r-1）为整数时：每次引入r个结点形成一个新结点
            - （t-1）/（r-1）余数为i：第一次引入i+1个结点形成新结点，之后每次引入r个结点形成新结点